L. R.F.B.Monastir — A.S :2020/2021

Devoir de synthèse N°1

Mathématiques — Classe : $4^{ème}$ M_1

Mr Zrafi Karim — Durée: 3.h

Exercice N°1: (5 pts)

1/ Soit la suite U définie sur $\mathbb{N}$ par $\begin{cases} U_0 = 1 \\ U_{n+1} = \dfrac{2U_n}{\sqrt{U_n^2+1}} \end{cases}$; $n \in \mathbb{N}$

a) Montrer que, pour tout entier naturel n, $1 \leq U_n \leq \sqrt{3}$.

b) Montrer que la suite U est croissante.

c) Montrer que la suite U est convergente et calculer sa limite.

2/ Soit la suite V définie sur $\mathbb{N}$, par : $V_n = \dfrac{(U_n)^2}{3-(U_n)^2}$.

a) Montrer que V est une suite géométrique dont on précisera la raison.

b) Exprimer V_n et U_n en fonction de n.

c) Retrouver alors $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n$.

3/ On pose $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n-1} (U_k)^2$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$; $n \leq S_n \leq 3n$.

b) Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{S_n}{n^2}$.

4/ On pose $T_n = \dfrac{S_n}{n}$; pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

a) Montrer que $\forall\ n \in \mathbb{N}^*$ on a : $n S_{n+1} - (n+1) S_n = n {U_n}^2 - S_n$.

b) En déduire que (T_n) est une suite croissante.

c) Montrer que (T_n) est une suite convergente.

5/ Soit $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $n > p$.

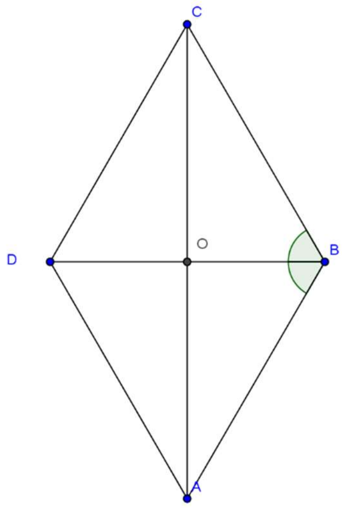
a) Montrer que : $(n-p){U_p}^2 \leq S_n \leq n{U_{n-1}}^2$. En déduire que : $\dfrac{n-p}{n} {U_p}^2 \leq T_n \leq {U_{n-1}}^2$.

b) Montrer que: pour tout $p \in \mathbb{N}^*$ on a : ${U_p}^2 \leq \lim\limits_{n\to+\infty} T_n \leq 3$.

c) En déduire la valeur de $\lim\limits_{n\to+\infty} T_n$.

Exercice N°2: (4 pts)

Dans le plan, rapporté à un repère orthonormé direct, on considère un losange ABCD de centre O tel que $\left(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}}\right) \equiv \frac{\pi}{3}[2\pi]$ et I milieu de [AB].



1/ Soit f une isométrie qui laisse globalement invariant le losange ABCD.

a) Montrer que $f([AC]) = [AC]$.
b) En déduire que $f(O) = O$.
c) Déterminer alors les quatre isométries qui laissent globalement invariant le losange ABCD.

2/a) Donner la nature et les éléments caractéristiques des isométries suivantes :

$f_1 = S_{(AC)} o S_{(AB)}$ et $f_2 = S_{(CD)} o S_{(CA)}$

b) Caractériser alors l'isométrie $g = R_{\left(C, -\frac{\pi}{3}\right)} o R_{\left(A, \frac{\pi}{3}\right)}$.

3/ On note E, F et G les symétriques respectives des points A, D et C par rapport au point B.

Soit h l'isométrie telle que : $h(A) = E$, $h(B) = F$ et $h(D) = B$.

a) Montrer que h n'admet aucun point fixe.
b) En déduire que h est une symétrie glissante.
c) Montrer que $t_{\overrightarrow{BD}} o h = S_{(BD)}$.
d) Donner alors le vecteur et l'axe de h.

Exercice N°3: (5 pts)

I/ On donne : $f(z) = z^2 - (i + 2\sin\theta)z + 1 - \cos\theta + i\sin\theta$; où $z \in \mathbb{C}$ et $\theta \in \mathbb{R}$.

1/ Montrer que : $-(2\cos\theta - 1)^2 = 4\sin^2\theta + 4\cos\theta - 5$.

2/ Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $f(z) = 0$.

3/ On donne $g(z) = z^2 - (2\sin\theta - i)z + 1 - \cos\theta - i\sin\theta$; où $z \in \mathbb{C}$ et $\theta \in \mathbb{R}$..

a) Montrer que : $g(z) = 0$ équivaut à $f(\bar{z}) = 0$.
b) Déduire alors dans $\mathbb{C}$ les solutions de l'équation : $g(z) = 0$.

II/ Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $\left(O, \vec{u}, \vec{v}\right)$

On donne les points $A\left(1 + \frac{i}{2}\right)$; $B\left(-1 + \frac{i}{2}\right)$; M_1 et M_2 d'affixes respectives :

$z_1 = \sin\theta + i\cos\theta$ et $z_2 = \sin\theta + i(1 - \cos\theta)$.

1/ Soit I le milieu de $[M_1M_2]$. Déterminer l'ensemble des points I lorsque θ varie dans $\mathbb{R}$.

2/ Soit l'application $\sigma : P \to P$; $M(z) \mapsto M'(z')$ tel que $z' = \overline{z} + i$.

a) Prouver que σ est une isométrie.
b) Déterminer $\sigma(A)$ et $\sigma(B)$ puis caractériser σ .

3/a) Déterminer et construire (Γ) l'ensemble des points M_1 lorsque θ varie dans $\mathbb{R}$.

b) En utilisant σ déduire la construction de (Γ') l'ensemble des points M_2 lorsque θ varie dans $\mathbb{R}$.

Exercice N°4 (5 pts)

Soit f la fonction définie sur $]-\infty,-1] \cup [1,+\infty[$ par $f(x) = \sqrt{x^2-1} + x$.

(ζ_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1/ a) Etudier la dérivabilité de f à droite en 1 et à gauche en -1 .

b) Préciser le domaine de dérivabilité de f puis calculer $f'(x)$.

c) Dresser le tableau de variation de f

2/a) Montrer que la droite $D : y = 2x$ est une asymptote oblique à (ζ_f) .

b) Tracer (ζ_f) .

3/ Soit g la restriction de f sur l'intervalle $[1,+\infty[$.

a) Montrer que g admet une fonction réciproque g^{-1} définie sur un intervalle J à préciser.
b) Calculer $g^{-1}(2)$ et $(g^{-1})'(2)$.
c) Tracer $(\zeta_{g^{-1}})$ dans le même repère et préciser le domaine de dérivabilité de g^{-1} .

4/ Soit h la fonction définie sur $\left[0,\frac{\pi}{2}\right[$ par $h(x) = g\left(\frac{1}{\cos x}\right)$.

a) Vérifier que $h(x) = \frac{1+\sin x}{\cos x}$, pour tout $x \in \left[0,\frac{\pi}{2}\right[$.

b) Montrer que h est une bijection de $\left[0,\frac{\pi}{2}\right[$ sur un intervalle K que l'on précisera.

c) Montrer que h^{-1} est dérivable sur K et que $(h^{-1})'(x) = \frac{2}{1+x^2}$.